

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ
- Đường đi và chu trình
- Đồ thị liên thông
- Một số dạng đồ thị đặc biệt
- Đồ thị phẳng

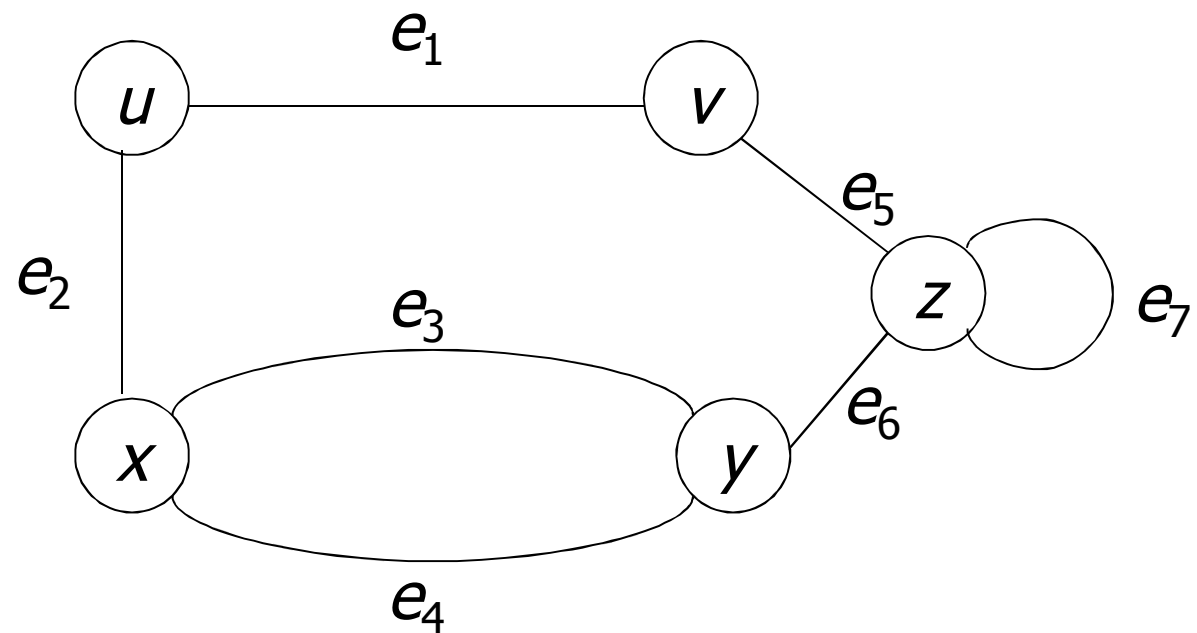
ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

- Đồ thị vô hướng (undirected graph) $G = (V, E)$, gồm một tập V các đỉnh (vertice) và một họ E các cạnh (edge), mỗi cạnh $e = (u, v) \in E$ ứng với một cặp không có thứ tự các đỉnh $u, v \in V$
- Đồ thị có hướng (directed graph) $G = (V, E)$, gồm một tập V các đỉnh và một họ E các cạnh, mỗi cạnh $e = (u, v) \in E$ ứng với một cặp có thứ tự các đỉnh $u, v \in V$

ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Ví dụ 1: Đồ thị vô hướng: $V = \{u, v, x, y, z\}$
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$e_3 = (x, y)$
 $e_4 = (x, y)$
 $e_7 = (z, z)$



ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

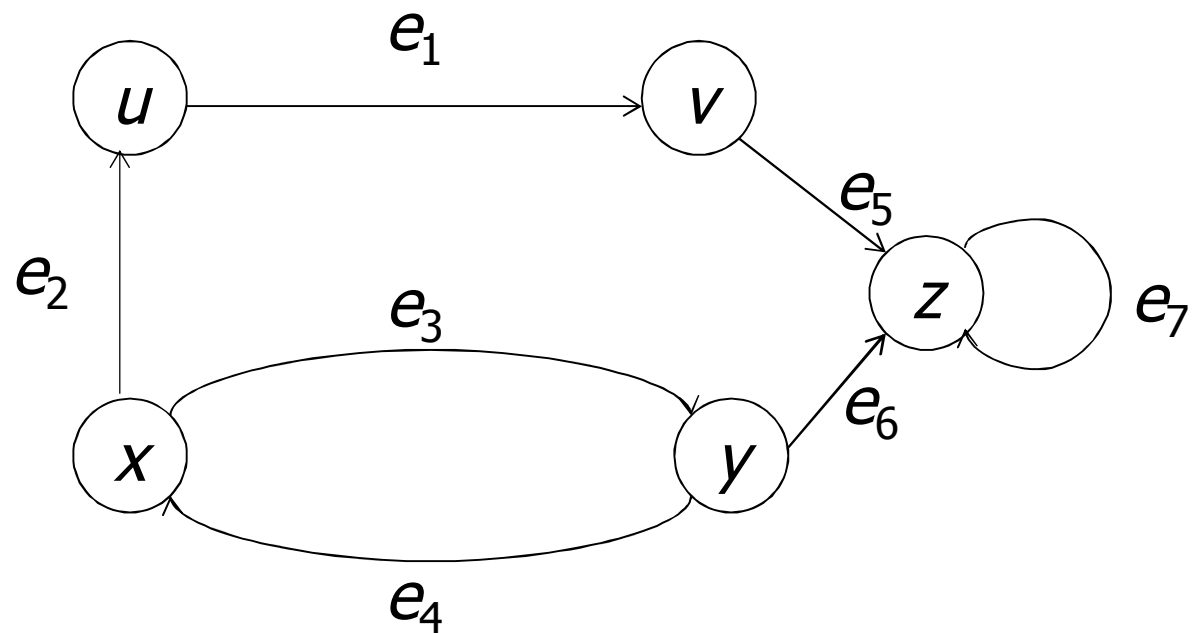
Ví dụ 2: Đồ thị có hướng: $V = \{u, v, x, y, z\}$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$e_3 = (x, y)$$

$$e_4 = (y, x)$$

$$e_7 = (z, z)$$



ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

- $e_7 = (z, z)$ là cạnh khuyên
- $e_3 = (x, y)$ và $e_4 = (x, y)$ là hai cạnh song song
- Một đồ thị không có cạnh khuyên hoặc cạnh song song gọi là đơn đồ thị (simple graph), ngược lại gọi là đa đồ thị (multigraph)

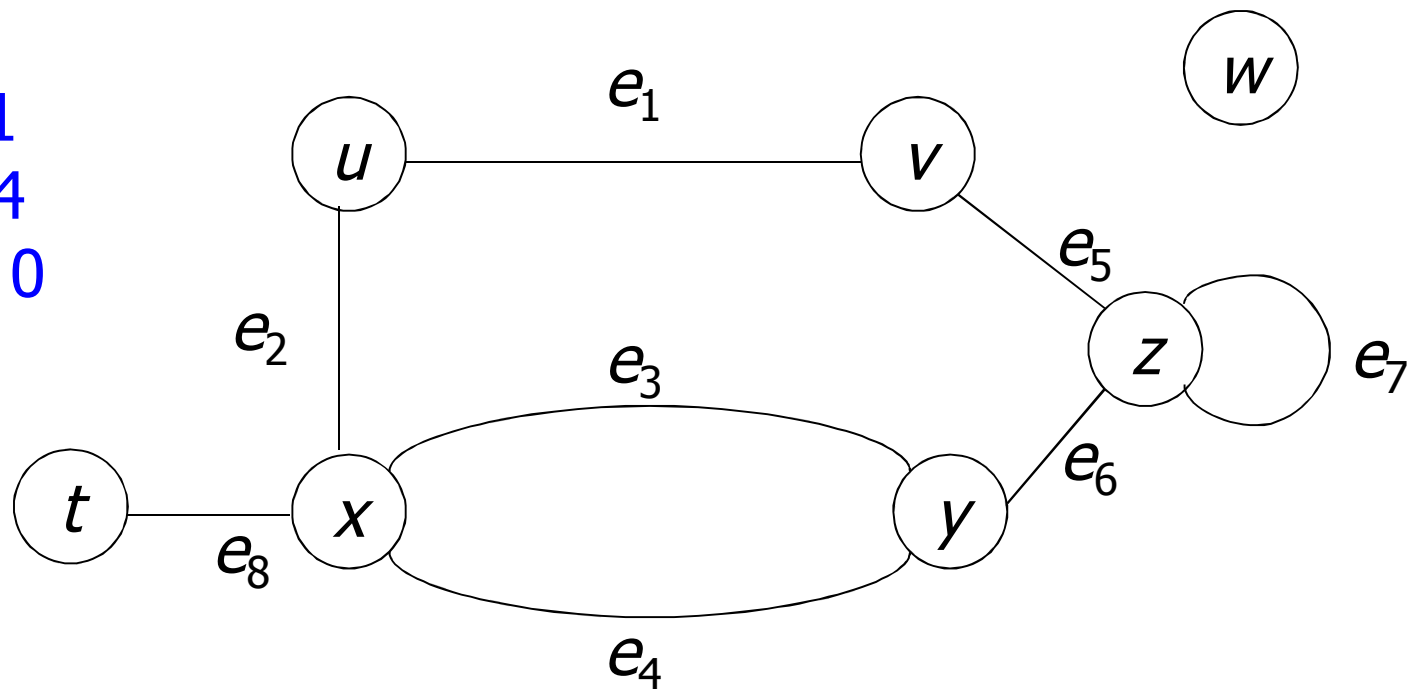
MỘT SỐ THUẬT NGỮ

- Đỉnh u và v là **kề nhau** (adjacent) nếu có cạnh $e = (u, v)$, cạnh e gọi là **liên thuộc với u và v**
- Bậc (degree) của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là **số cạnh liên thuộc với nó**, ký hiệu $\deg(v)$, đỉnh bậc 0 gọi là đỉnh cô lập, đỉnh bậc 1 gọi là đỉnh treo
- Bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số **cạnh đi ra khỏi nó (đi vào nó)** và ký hiệu $\deg^+(v)$ ($\deg^-(v)$)

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Ví dụ 3: Bậc của các đỉnh đồ thị vô hướng

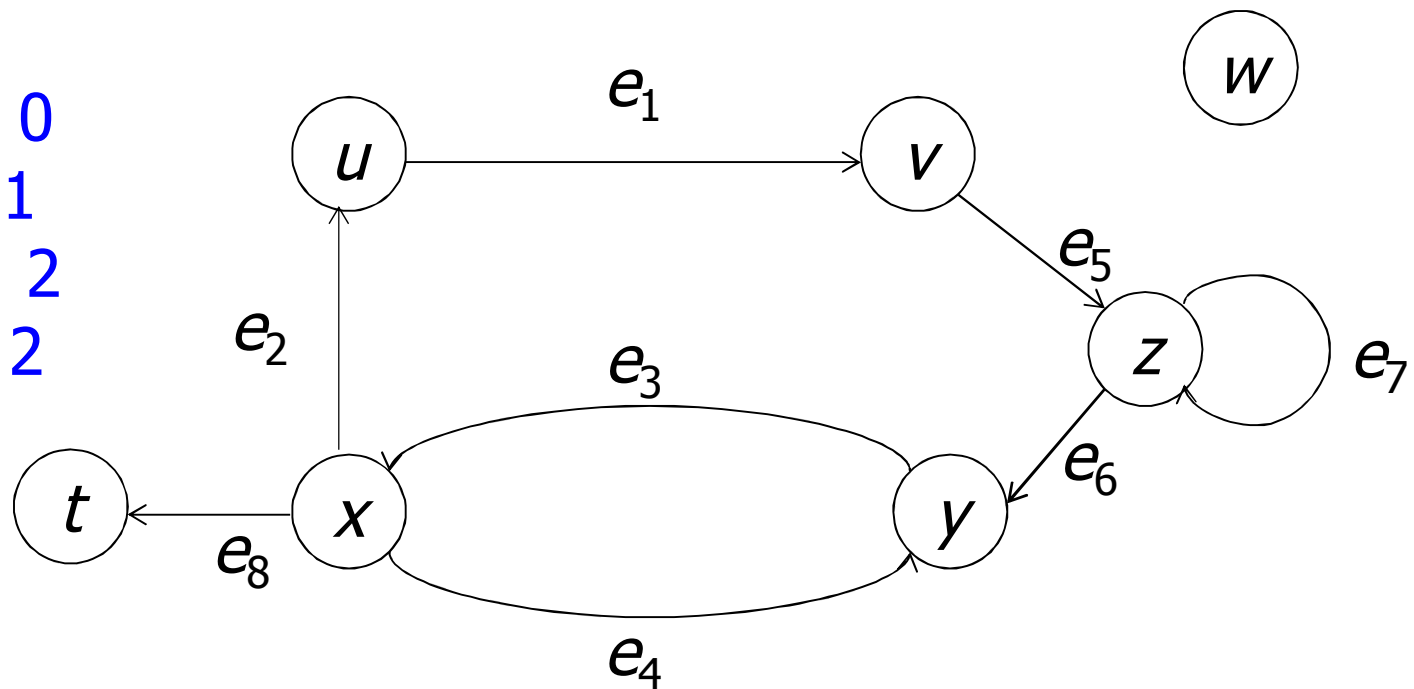
$\deg(t) = 1$
 $\deg(z) = 4$
 $\deg(w) = 0$



MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Ví dụ 4: Bán bậc của các đỉnh đồ thị có hướng

$deg^+(t) = 0$
 $deg(t) = 1$
 $deg^+(z) = 2$
 $deg(z) = 2$



MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Định lý 1

$G=(V, E)$ là đồ thị vô hướng m cạnh, thì

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh ?

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Chứng minh

- Mỗi cạnh $e = (u, v)$ được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$
- Suy ra $2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Ví dụ 5

- Đồ thị $G = (V, E)$, n đỉnh và mỗi đỉnh có bậc là 6 có bao nhiêu cạnh?
- Theo định lý $2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = n \cdot 6$ hay $2m = 6n$
- Nên số cạnh $m = 3n$

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Hệ quả

- Trong một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là một số lẻ) là một số chẵn
- **Chứng minh?**

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Chứng minh

- Gọi O và U là tập các đỉnh bậc lẻ và bậc chẵn của G , thì

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in O} \deg(v) + \sum_{v \in U} \deg(v)$$

- Do $\deg(v)$ chẵn với mọi $v \in U$ nên $\sum_{v \in U} \deg(v) = 2k$
- Nên $2m = \sum_{v \in O} \deg(v) + 2k$ hay $\sum_{v \in O} \deg(v) = 2m - 2k$
- Vì mỗi $\deg(v)$, với $v \in O$, là lẻ và có $|O|$ số như vậy, suy ra $|O|$ là một số chẵn (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn)

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Định lý 2

- $G=(V, E)$ là đồ thị có hướng, thì

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v)$$

Chứng minh

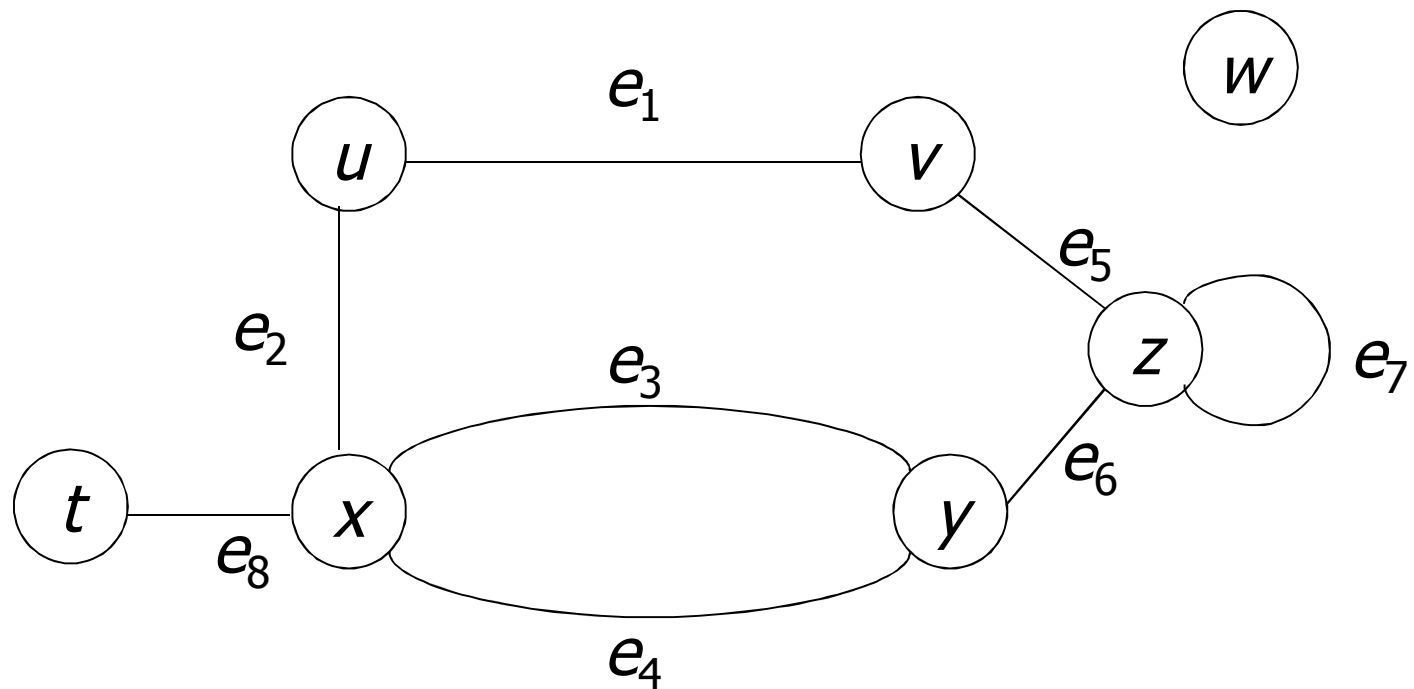
- Vì mỗi cung $e=(u, w)$ chỉ được tính một lần trong bán bậc ra của u và một lần trong bán bậc vào của w nên có hệ thức trên

ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

- Đường đi độ dài n từ đỉnh x_0 đến đỉnh x_n trong một đồ thị là dãy $P = x_0, x_1, \dots, x_n$ trong đó mỗi (x_i, x_{i+1}) là một cạnh
- Đường đi có đỉnh đầu x_0 trùng với đỉnh cuối x_n gọi là chu trình
- Đường đi hay chu trình gọi là đơn nếu không có cạnh (cung) lặp lại

ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

Ví dụ 5: $P = u, v, z, y$ là một đường đi đơn và $C = u, v, z, y, x, u$ là một chu trình đơn

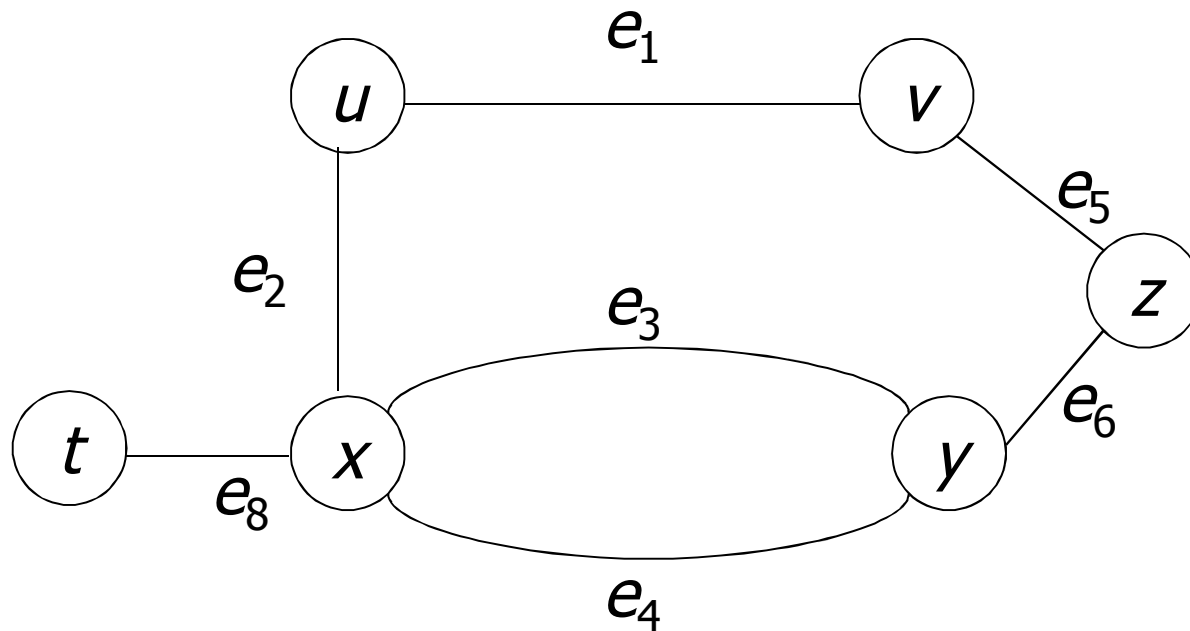


ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

- Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó

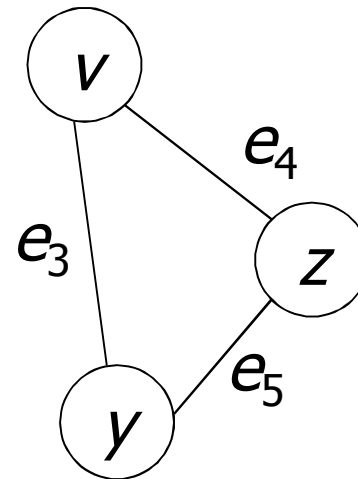
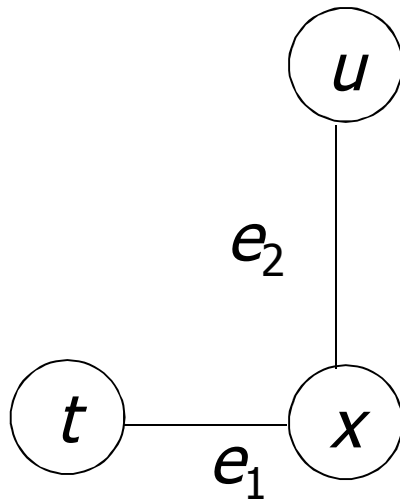
ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Ví dụ 7: Đồ thị vô hướng là liên thông



ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Ví dụ 8: Đồ thị vô hướng không liên thông

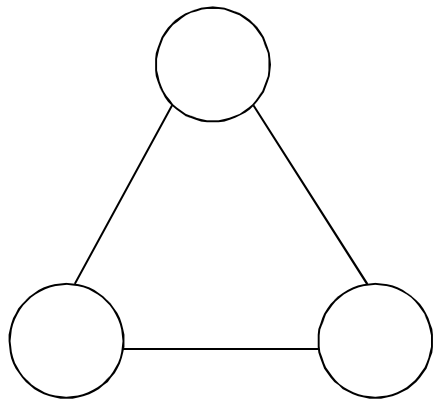


ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

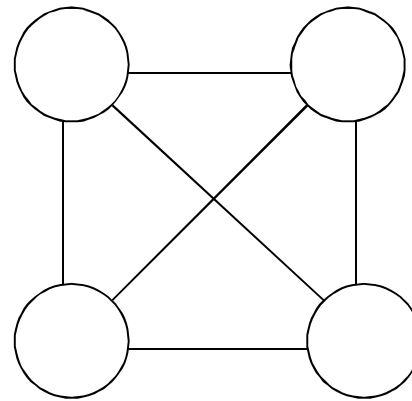
- Một đồ thị $H=(W, F)$ được gọi là đồ thị con của đồ thị $G=(V, E)$ nếu $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$
- Khi một đồ thị không liên thông, nó là bao gồm một số đồ thị con (thành phần) liên thông rời nhau và **bậc của một đỉnh trong một thành phần bất kỳ cũng bằng bậc của đỉnh đó (trong đồ thị)**

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu K_n , là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh luôn có cạnh



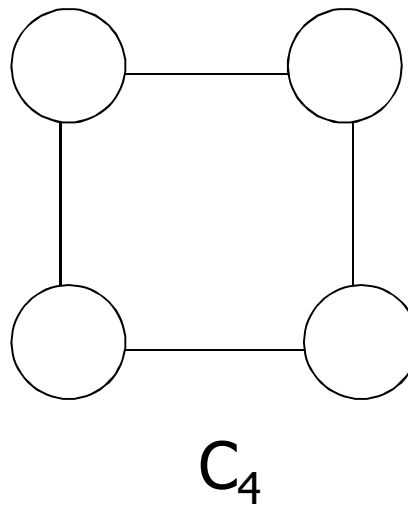
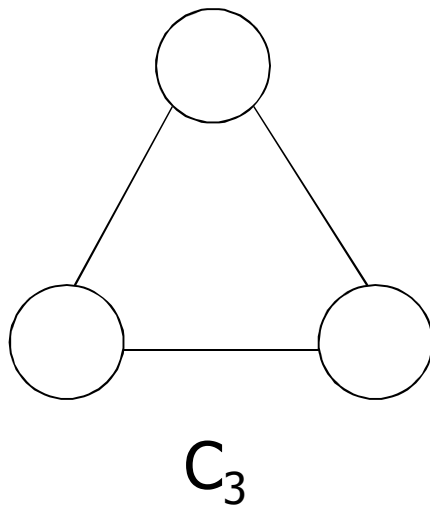
K_3



K_4

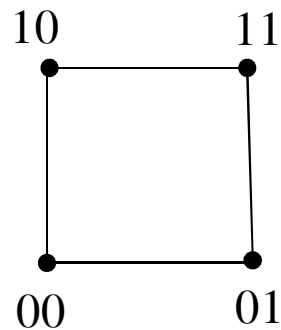
MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị vòng C_n , $n \geq 3$, là **đơn đồ thị** vô hướng n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh là $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)$

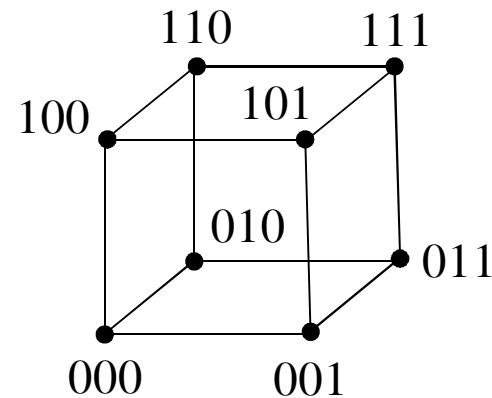


MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị lập phương Q_n , là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n **xâu nhị phân độ dài n (có 2^n đỉnh)**. Hai đỉnh là kề nhau nếu hai xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.



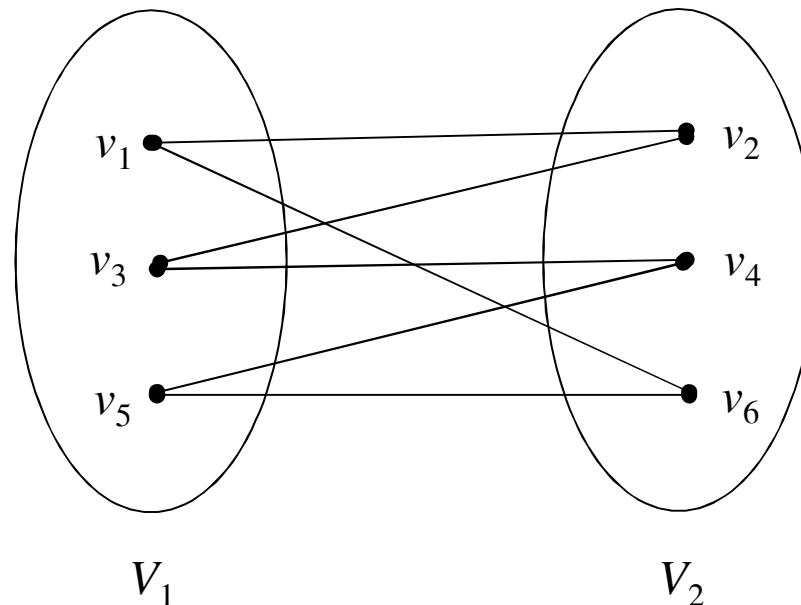
Q_2



Q_3

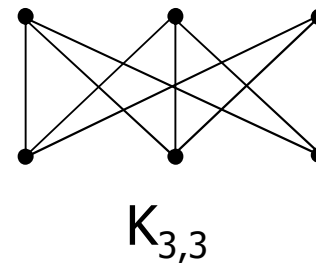
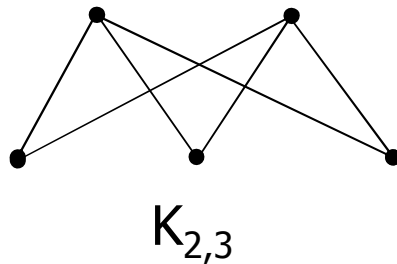
MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị hai phía (phân đôi) $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị mà tập đỉnh V của nó có thể được phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của nó chỉ nối một đỉnh nào đó trong X với một đỉnh nào đó trong Y , ký hiệu $G=(X \cup Y, E)$



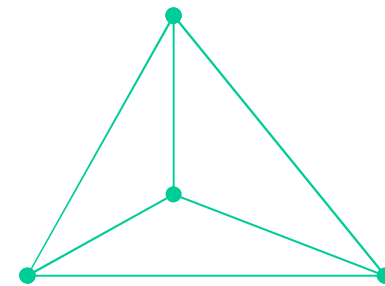
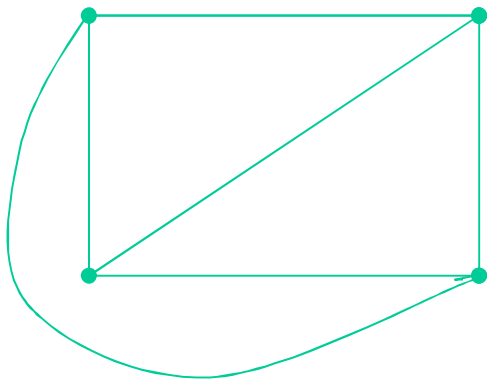
MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị hai phía $G=(X \cup Y, E)$ với $|X|=m$ và $|Y|=n$ được gọi là **đầy đủ**, ký hiệu $K_{m,n}$ nếu mỗi đỉnh trong X được nối với mọi đỉnh trong Y



ĐỒ THỊ PHẪNG

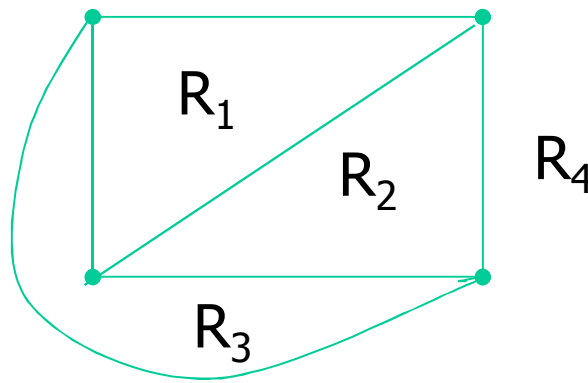
- Một đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu nó có thể được vẽ trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau (trừ ở đỉnh), cách vẽ như vậy được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị



Các biểu diễn phẳng của K_4

ĐỒ THỊ PHẪNG

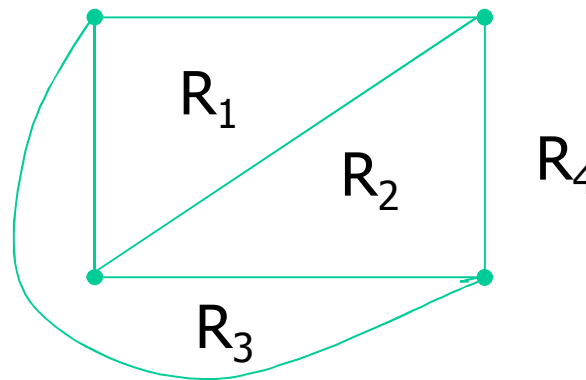
- Biểu diễn phẳng của một đồ thị chia mặt phẳng thành một số miền theo công thức Euler



ĐỒ THỊ PHẪNG

- **Định lý 4** (công thức Euler) Giả sử m, n tương ứng là số cạnh và đỉnh của một đơn đồ thị phẳng liên thông, khi đó số miền r mà biểu diễn phẳng của nó tạo ra thỏa mãn

$$r = m - n + 2$$



ĐỒ THỊ PHẪNG

- **Hệ quả 3** Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông m cạnh n đỉnh, $n \geq 3$ thì $m \leq 3n - 6$
- **Ví dụ** K_5 có 5 đỉnh 10 cạnh không thỏa bất đẳng thức $m \leq 3n - 6$ nên K_5 không phẳng

ĐỒ THỊ PHẪNG

- **Hệ quả 4** Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông m cạnh n đỉnh, $n \geq 3$ và không có chu trình độ dài 3 thì $m \leq 2n - 4$
- **Ví dụ** $K_{3,3}$ có 6 đỉnh 9 cạnh không thỏa bất đẳng thức $m \leq 2n - 4$ nên $K_{3,3}$ không phẳng